Mastermath Meetkunde: inhoud en leerdoelen

In dit vak bekijken we meerdere manieren om meetkunde te bedrijven, klassieke meetkunde volgens Euclides, analytische en vectormeetkunde, en projectieve meetkunde. Deze invalshoeken bieden een hoger perspectief op de 'schoolmeetkunde' en laten tevens zien hoe in de loop der tijden nieuwe aanpakken tot nieuwe successen hebben geleid. Wat deze invalshoeken met elkaar verbindt komt uitdrukkelijk aan bod. Het is nodig ook vertrouwd te raken met de meetkundesoftware Geogebra.

Inhoud

In het **eerste deel** staat de opbouw van de meetkunde volgens Euclides centraal (planimetrie, maar met uitstapjes naar de stereometrie). Kernfrasen hierbij zijn: de rol van Euclides' axioma's, in het bijzonder het parallellenaxioma, de gebreken in zijn axiomastelsel, latere ontwikkelingen ter reparatie met name door Hilbert (rond 1900), stellingen uit de meetkunde, bewijzen in de meetkunde, constructies met passer en liniaal, ruimtelijke objecten, in het bijzonder regelmatige veelvlakken.

Vanuit deze axiomatische aanpak verleggen we het accent naar analytische en vectormeetkunde, met en zonder coördinaten. We beschrijven daarbij meetkundige objecten zoals punten, lijnen, vlakken, cirkels en hun onderlinge ligging in vector- en coördinatentaal (vectorvoorstellingen, vergelijkingen), en gaan in op de wijze waarop je vectormiddelen en coördinaten kunt gebruiken om meetkundige berekeningen en bewijzen te leveren. In de meetkunde spelen transformaties zoals spiegelingen en rotaties een belangrijke rol en in dit deel concentreren we ons op afstandsbewarende transformaties van (met name) het vlak en enkele van hun eigenschappen, de zogenaamde isometrieën. In verdere delen van het college komen ook andere transformaties aan de orde.

In het **tweede deel** van de collegereeks bestuderen we projectieve meetkunde, voornamelijk de meetkunde van het reële projectieve vlak. We beginnen met de beginselen van perspectieftekenen. (Perspectieftekenen is onderdeel van wiskunde C uit het vwo.) We bestuderen de relatie tussen euclidische meetkunde en projectieve meetkunde. Hierbij speelt de filosofie van Felix Klein een belangrijke rol. In deze filosofie staan transformaties centraal. Zo slaan we verschillende vliegen met één filosofie. Ten eerste kan projectieve meetkunde helpen om efficiënt euclidische stellingen te genereren en te bewijzen. Ten tweede begrijp je beter wat je in een bewijs 'zonder beperking van algemeenheid' mag aannemen en waarom. Ten derde leer je transformaties te gebruiken in bewijzen. En ten vierde maak je kennis met de centrale rol die transformaties sinds Galois, Klein en anderen vervullen in de theoretische wiskunde en natuurkunde.

Afhankelijk van de tijd besteden we aandacht aan verwante thema's, zoals de topologie van het projectieve vlak, rationaal parametriseren van kegelsneden en/of hyperbolische meetkunde.

Leerdoelen

De student kent definities en eigenschappen van de concepten in onderstaande lijst en

- is bekend met de relatie tussen de axioma's van Euclides en die van Hilbert, ihb met betrekking tot het parallellenpostulaat van Euclides;
- kan vanuit axioma's, congruentie- en gelijkvormigheidskenmerken en stellingen (zoals Pappus, Thales, Pythagoras, Desargues) allerlei resultaten afleiden;
- kan volgens de gangbare spelregels constructies met passer en liniaal uitvoeren en beschrijven op het gebied van evenredigheid en algebra;
- is bekend met lijnen en cirkels met betrekking tot een driehoek (bijvoorbeeld de lijn van Euler en de 9-puntscirkel van een driehoek);
- kan berekeningen uitvoeren en resultaten afleiden met betrekking tot regelmatige n-hoeken en regelmatige veelvlakken;

- kan met geschikte coördinaten werken bij meetkundige problemen;
- is bekend met de notie van een vectorruimte;
- kan vectoren en het inproduct in het vlak en in de ruimte hanteren om punten, lijn, vlakken, cirkels te beschrijven en om vragen over hun onderlinge ligging (afstand, hoek) te beantwoorden met berekeningen en bewijzen;
- kan isometrieën van het vlak in verband brengen met (samenstellingen van) de klassieke typen (lijnspiegeling, rotatie, translatie en glijspiegeling) en resultaten hierover bewijzen;
- kan de meetkundige en algebraïsche beschrijvingen van parabool, ellips (cirkel) en hyperbool hanteren;
- kent de definitie van de projectieve ruimte;
- kent de stellingen van Pappos, Desargues en kan deze bewijzen met behulp van homogene coördinaten en met behulp van affiene technieken;
- kan projectieve stellingen dualiseren;
- kent de relaties tussen de projectieve ruimtes en vectorruimten;
- kan technieken uit de lineaire algebra toepassen in projectieve meetkunde, zoals werken met homogene coördinaten en kwadratische vormen;
- kent de definitie van affiene ruimtes;
- kent de relaties tussen affiene ruimtes, vectorruimtes en projectieve ruimtes;
- kent de definitie van dubbelverhouding, haar gedrag onder projectieve transformaties en onder permutaties;
- kan het begrip 'harmonisch toegevoegde' hanteren in projectieve en affiene situaties en dit begrip relateren aan perspectieftekenen
- kent projectieve transformaties, affiene transformaties en euclidische transformaties en hun relaties
- kan de begrippen projectieve kegelsnede, niet-ontaarde kegelsnede hanteren;
- kent het gedrag van kegelsneden in de wisselwerking tussen affiene en projectieve meetkunde;
- kent de topologie van het reële projectieve vlak en van de reële projectieve lijn, inclusief de topologische eigenschappen van lijnen en kegelsneden in het reële projectieve vlak en inclusief het begrip 'oriënteerbaarheid';
- kan een niet-ontaarde kegelnede rationaal parametriseren door een reële projectieve lijn;
- kan de besproken meetkunde in een breder meetkundig perspectief plaatsen.

Voorkennis

Voor het vak Meetkunde veronderstellen we de meetkunde uit het vwo-programma wiskunde B (zowel van 2014 als dat vanaf 2015) bekend alsmede basiskennis op het gebied van de lineaire algebra (vectorruimte, vectorvoorstellingen en vergelijkingen van lijnen en vlakken, lineaire afbeelding, basis, coördinaten, matrix, stelsels lineaire vergelijkingen, determinant, bilineaire vorm). Ook verwachten we vaardigheden op het gebied van wiskundig redeneren en formuleren. Voor de collegereeks wordt bovendien basiskennis uit de groepentheorie bekend verondersteld. Denk aan het begrip (onder)groep in de context van het samenstellen van transformaties en de inverse van een transformatie (inclusief eigenschappen zoals associativiteit). Belangrijke voorbeelden betreffen de symmetrieën van regelmatige veelvlakken, de verzameling van inverteerbare n bij n matrices met matrixvermenigvuldiging als groepsoperatie, de verzameling translaties van het vlak met samenstellen als operatie.

Hier zijn enkele suggesties voor het opfrissen van de voorkennis.

- Een beschrijving van het domein *Voortgezette Meetkunde* uit het oude vwo-programma wiskunde B en het domein *Meetkunde met coördinaten* uit het nieuwe programma is bijvoorbeeld te vinden op www.examenblad.nl. In (oude) schoolboeken is deze stof uiteraard te vinden. Een deel hiervan is ook terug te vinden in het huidige vwo-programma wiskunde D, bijvoorbeeld op www.math4all.nl/overzichten/vwo-d/33.
- Voor *Lineaire algebra* kunnen de volgende websites handig zijn:
  - MIT's cursus lineaire algebra door Gilbert Strang:
    ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-06sc-linear-algebra-fall-2011/
  - Jim Hefferson, *Linear Algebra*, vrij verkrijgbaar via: joshua.smcvt.edu/linearalgebra/

  Maar studieboeken zoals bijvoorbeeld David Lay, *Linear algebra and its applications* (Pearson), kunnen ook gebruikt worden. In het Nederlands is het boek *Lineaire algebra* van Paul Igodt en Wim Veijs (Universitaire Pers Leuven) zeer geschikt.
- Vaardigheden op het gebied van *wiskundig redeneren en formuleren*. Zie bijvoorbeeld Kevin Houston's www.kevinhouston.net/pdf/10ways.pdf, maar er is ook het hele boek van Houston: *How to think like a mathematician*, zie www.kevinhouston.net/httlam.html voor delen van het boek.

Literatuur

Bij het vak maken we gebruik van een door de docenten samengesteld dictaat en van het boek *Lessen in projectieve meetkunde* van Martin Kindt (Epsilon Uitgaven, 2003). Het kan nuttig zijn ook andere literatuur te raadplegen, zoals bijvoorbeeld:

- J.M. Aarts, *Meetkunde. Facetten van de planimetrie en stereometrie*, Epsilon Uitgaven, 2000
- Bruno Ernst, *De interessantste bewijzen voor de stelling van Pythagoras*, Epsilon Uitgaven, 2011
- Robin Hartshorne, *Geometry: Euclid and beyond*, Springer, 2000
- Miles Reid, Balázs Szendrői, *Geometry and topology*, Cambridge University Press, 2005
- I.N. Stewart, *Galois theory* (diverse edities), Chapman & Hall/CRC (1975 – 2015)
  (Beschrijft de relatie tussen meetkundige constructies en algebra, het bespreekt onder meer waarom de drie beroemde constructieproblemen – driedeling van de hoek, kwadratuur van de cirkel, verdubbeling van de kubus – niet met passer en liniaal uitgevoerd kunnen worden.)
- Geogebra: www.geogebra.org/?lang=nl